Ueber

Vertheilung und Strömung der Electricität auf dem Parallelepipedon.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doctorgrades

der

philosophischen Facultät der Universität Leipzig.

Vorgelegt

von

Hermann Niebour.

Greifswald.

—

1886.

DRUCK VON F. W. KUNIKE.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545809_0030

Meinen lieben Onkel

Herrn Oberst Niebour zu Bremen

in steter Dankbarkeit

gewidmet.

Ueber Verteilung und Strömung der Elektricität auf dem Parallelepipedon.

I.

Zur elektrischen Verteilung auf dem Parallelepipedon.

In der weiteren Ausarbeitung der Poisson'schen Theorie der Elektrostatik, welche dieselbe durch Gauss und Green erfahren hat, tritt, bei der Behandlung elektrostatischer Probleme für Conductoren von specieller Form, die Bedeutung der „Green'schen Belegung" des betreffenden Körpers in Bezug auf einen inneren Punkt, wie die der „Green'schen Function" vor allem hervor. — Die Bestimmung dieser Grössen für das Parallelepipedon wird uns in diesem Teile ausschliesslich beschäftigen.

Die anzuwendende Methode wollen wir zunächst an einem einfacheren Fall darlegen, indem wir uns vorweg die Aufgabe stellen:

> Gegeben ist eine unendliche planparallele Platte von der Dicke a und innerhalb ein Punkt P. Gesucht wird die diesem Punkt entsprechende Green'sche Oberflächenbelegung der Platte.

Der Gang der Lösung dieser Aufgabe ist der folgende: Wir bestimmen die „Green'sche Function" der gesuchten Belegung, haben dann also neben dem (direct gegebenen) Potential derselben auf äussere auch das auf innere Punkte und finden die Belegung η selbst für jeden Punkt der Oberfläche, wenn wir die Poisson'sche Differentialgleichung:

$$\frac{d\bar{V}_i}{dn} - \frac{d\bar{V}_a}{dn} = -4\pi\eta$$

verwenden.

$\bar{V}_i$ und $\bar{V}_a$ bezeichnen hierin die Potentialwerte der Belegung in den dem betreffenden Oberflächenpunkte unmittelbar benachbarten äusseren (a) und inneren (i) Punkt, n ist die innere Flächennormale.

Die Green'sche Function ist im Innern der Platte überall eindeutig und stetig; sie genügt hier der Gleichung: $\Delta f = 0$ und ist in allen Oberflächenpunkten mit dem Potential von P identisch. Zu ihrer Bestimmung benutzen wir hier wie später die Methode der Spiegelbilder. Dem Spiegelbilde von P gegen die Grenzebene I der Platte erteilen wir die Masse $+1$. Dann stimmt sein Potential für alle Punkte der Ebene I mit dem des Poles P überein. Für die Ebene II gilt das nicht; vielmehr müssen wir, um auch hier Uebereinstimmung zu erreichen, den Spiegelbildern von P und P' gegen die Ebene II je die Massen $+1$ und -1 erteilen. Fahren wir in dieser Weise fort, bis ins Unendliche hin, so findet schliesslich in beiden Ebenen zugleich Uebereinstimmung statt, und es ist demnach die Green'sche Function das Potential sämtlicher aufeinanderfolgenden Spiegelpunkte des Punktes P gegen die Grenzebenen, versehen mit den abwechselnden Massen ± 1.

Die Aufstellung jenes Ausdruckes hat sonach keine Schwierigkeiten. Wir nehmen die Mittelebene zur yz-Ebene unseres Coordinatensystems und legen die x-Achse durch den Punkt P, dem wir die Coordinate δ erteilen. Die Coordinaten sämtlicher Spiegelpunkte von P werden alsdann:

$$\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa \delta,$$

$\varkappa$ wachsend von $+1$ bis $+\infty$ und von -1 bis $-\infty$; die zugehörigen Massen der Spiegelpunkte sind $(-1)^{\varkappa+1}$; so dass die Green'sche Function folgende Form gewinnt:

$$Vi = \frac{1}{\sqrt{(x-\delta)^2+y^2+z^2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa} \frac{(-1)^{\varkappa+1}}{\sqrt{(\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa\delta-x)^2+y^2+z^2}}.$$

In der Tat hebt sich für die Oberflächenpunkte $x = \pm \alpha/2$ die letzte Summe fort und wird also $V_i = V_a$. Den übrigen genannten Bedingungen, die wir mit C. Neumann als Hauptbedingungen zusammenfassen wollen, genügt V_i ohne weiteres als Potential äusserer Massen.

Aus V_i resultirt für die Dichtigkeit der Green'schen Massenbelegung beider Ebenen bei Anwendung der oben erwähnten Poisson-schen Gleichung:

$$1.\quad \begin{cases} \eta I = \dfrac{1}{4\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_x \dfrac{(-1)^{x+1}\left(x\alpha + (-1)^x\delta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\left\{\left(x\alpha + (-1)^x\delta - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + y^2 + z^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \\ \eta II = \dfrac{1}{4\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_x \dfrac{(-1)^x\left(x\alpha + (-1)^x\delta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\left\{\left(x\alpha + (-1)^x\delta + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + y^2 + z^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Wir geben diesen Ausdrücken die folgende Gestalt:

$$\begin{cases} \eta I = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_x \dfrac{(-1)^{x+1}\left(x\alpha + (-1)^x\delta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\left\{\left(x\alpha + (-1)^x\delta - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + y^2 + z^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \\ \eta II = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{-1}^{-\infty}{}_x \dfrac{(-1)^{x+1}\left(-x\alpha - (-1)^x\delta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\left\{\left(-x\alpha - (-1)^x\delta - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + y^2 + z^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

welche uns sofort ihre physikalische Bedeutung erkennen lässt;

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{m\delta}{\{\delta^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

ist die Green'sche Belegung einer Ebene $x = c$ (als Grenze des Halbraums gedacht) in Bezug auf einen Pol von dem Verticalabstand δ von ihr und der Masse m. Danach lautet das gewonnene Resultat:

„Um die einem inneren Punkt P als Pol entsprechende Green'sche Oberflächenbelegung einer unendlichen Platte zu erhalten, denken wir uns sämtliche aufeinanderfolgenden Spiegelpunkte des Punktes P gegen die Grenzebene der Platte bis ins Unendliche hin construirt. Den beiden ersten Spiegelbildern von P erteilen wir je die Masse $+1$, dem nächsten Paar je die Masse -1 u. s. w. Die so bestimmten unendlich vielen Massenpunkte teilen wir in solche, welche, von P aus betrachtet, jenseits der Ebene I und solche, die jenseits der Grenzebene II der Platte liegen, und bilden nun für die Punkte der ersten Art die ihnen als Pole entsprechenden Green'schen Oberflächenbelegungen der Ebene I (als Grenze des Halbraumes gedacht), für die Punkte zweiter Art die entsprechenden Belegungen für die Grenzebene II.

Denken wir uns endlich die Dichtigkeiten aller dieser Belegungen in jedem Punkt der beiden Ebenen summirt,

so haben wir in dieser Summe die gesuchte Dichtigkeit der Green'schen Oberflächenbelegung der Platte in Bezug auf P."

Hierbei mag bemerkt werden, dass, abgesehen von sogleich mitzuteilenden Beschränkungen, dieser Satz auf jedes beliebige Polyeder auszudehnen ist.

Man hat:

„Construirt man sämtliche Spiegelpunkte des Poles P gegen die Grenzebenen des Polyeders bis ins Unendliche hin, so ist die Green'sche Massenbelegung des Polyeders für jedes der begrenzenden Ebenenstücke gleich der Summe der Dichtigkeiten der Green'schen Belegungen dieser Ebenen (als Grenzen des Halbraums gedacht), gebildet für diejenigen Spiegelpunkte als Pole, welche durch die betreffende Ebene von P getrennt sind. — Die Massen, welche man dabei den Spiegelbildern zu erteilen hat, sind abwechselnd von der Grösse $+1$ oder -1, und zwar erhalten die ersten Spiegelpunkte von P alle die Masse $+1$; den bei der zweiten Spiegelung neu gewonnenen Punkten ist je die Masse -1 zu verleihen u. s. w."

Genauer gilt dieser Satz dann, wenn sämtliche Spiegelpunkte ausserhalb des Polyeders liegen und die erhaltenen Reihen convergiren. Ersteres ist zur Stetigkeit der Green'schen Function erforderlich und ist nur bei denjenigen Polyedern der Fall, deren Grenzebenen unter Winkeln von der Form $\frac{\pi}{n}$ (n eine ganze Zahl) zusammenstossen; letzteres bedarf im allgemeinen einer besonderen Untersuchung, welche in unserem Fall der unendlichen Platte fortfällt, weil, wegen der bis ins Unendliche abnehmenden Glieder mit wechselndem Vorzeichen, die Convergenz unmittelbar klar ist.

Weiter erwähnen wir zu der oben gelösten Aufgabe noch, dass verschiedene Grenzmethoden uns ebenfalls einfach zum Ziel geführt haben würden.

So gelangen wir zu den oben angeführten Resultaten, wenn wir in den Ausdrücken, die C. Neumann mittelst der dipolaren Coordinaten für die Green'sche Oberflächenbelegung zweier ausserhalb einander liegenden Kugeln entwickelt, die Kugelmittelpunkte nach verschiedenen Seiten ins Unendliche rücken lassen. Wir wollen einen anderen derartigen Grenzübergang kurz andeuten, ausgehend von den wohl neuesten Formeln dieser Art, die Mehler in den mathematischen Annalen Bd. 18 („Zur Theorie der Verteilung der Elektricität in leitenden Körpern") S. 469 ff. ableitet. Aus den letzten dort gegebe-

nen Ausdrücken ist als Green'sche Function für zwei concentrische Kugeln von den Radien $a = e^{\varrho_a}$ und $b = e^{\varrho_b}$ ($a < b$, der Raum zwischen ihnen als Conductor gedacht) zu entnehmen,

$$V_i = \frac{1}{e^{2\varrho} + e^{2\varrho_0} - 2\cos\vartheta \,.\, e^{\varrho+\varrho_0}}$$

$$+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \left\{ \frac{e^{\varrho a - \varrho_0 + s(\varrho a - \varrho b)}}{\sqrt{e^{2\varrho} + e^{2\varrho a + 2\varrho b - 2\varrho_0 + 2(2s+1)(\varrho a - \varrho b)} - 2\cos\vartheta \,.\, e^{\varrho a + \varrho b + \varrho - \varrho_0 + (2s+1)(\varrho a - \varrho b)}}} \right.$$

$$\left. - \frac{e^{s(\varrho a - \varrho b)}}{\sqrt{e^{2\varrho} + e^{2\varrho_0 + 4s(\varrho a - \varrho b)} - 2\cos\vartheta \,.\, e^{\varrho_0 + \varrho + 2s(\varrho a - \varrho b)}}} \right\}$$

Hier ist der Kugelmittelpunkt als Coordinatenanfang gewählt; die Polarcoordinaten des Poles P sind e^{ϱ_0} ($= x_0$), 0,0 und die des variablen Punktes e^{ϱ} ($= r$), ϑ, φ. Wir können also auch schreiben:

$$V = \frac{1}{\sqrt{r^2 + {x_0}^2 - 2rx_0\cos\vartheta}}$$

$$+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \left\{ \frac{\frac{a}{x_0}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^s}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{ab}{x_0}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^{2(2s+1)} - 2r\frac{ab}{x_0}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2s+1}\cos\vartheta}} \right.$$

$$\left. - \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^s}{\sqrt{r^2 + {x_0}^2\left(\frac{a}{b}\right)^{4s} - 2rx_0\left(\frac{a}{b}\right)^{2s}\cos\vartheta}} \right\}$$

Lassen wir nun den Kugelmittelpunkt ins Unendliche rücken, so werden die Zähler der Summenglieder sämtlich 1 und da das erste Glied sich forthebt gegen das 0te Glied der letzten Summe, so sehen wir V_i ist das Potential der Punkte $\frac{ab}{x_0}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2s+1}$, 0,0, vermindert um das Potential der Punkte $x_0\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2s}$, 0,0; s wachsend von $-\infty$ bis $+\infty$, nur bei den letzten Punkten das Glied $s = 0$ übersprungen. Führen wir jetzt unsere alten Bezeichnungen und unser altes Coordinatensystem wieder ein, so ist zu setzen:

$$x_0 = a + \frac{\alpha}{2} - \delta$$

$$b = a + \alpha$$

und die Coordinaten der Punkte erster und zweiter Art werden:

1) $$\frac{a+\alpha}{1+\frac{\frac{\alpha}{2}-\delta}{a}}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{a}}\right)^{2s+1}-a-\frac{\alpha}{2},\ 0{,}0;$$

2) $$\left(a+\frac{\alpha}{2}-\delta\right)\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{a}}\right)^{2s}-a-\frac{\alpha}{a},\ 0{,}0.$$

Gehen wir hierin zur Grenze für $a=\infty$ über, so wird aus den letzten Ausdrücken:

$$(2s+1)\alpha-\delta,\quad \text{resp.}\quad 2s\alpha+\delta;$$

das aber sind die Coordinaten der Spiegelpunkte von P, und wir haben somit unsere oben abgeleiteten Formeln aus den von Mehler aufgestellten gewonnen.

Die Mehler'schen Untersuchungen sind im übrigen dadurch ausgezeichnet, dass sie die Resultate als Integrale elliptischer Functionen ergeben. Bei unserem Grenzfall, der unendlichen Platte, können genau dieselben Formen wol nicht beibehalten werden, indessen ist es leicht in etwas analoger Weise Integrale von ϑfunctionen zu ververwenden, wenn wir uns an eine Bemerkung erinnern, die Riemann bei ähnlicher Gelegenheit macht. (Riemann-Hattendorf: Schwere, Elektricität, Magnetismus S. 89):

Es ist nämlich die Euler'sche Γfunction für das Argument $\frac{1}{2}$:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}=\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

oder für $x=N.t$:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{t}}e^{-Nt};$$

Setzen wir nun $N=(\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa\delta-x)^2+y^2+z^2$ und tragen das Ganze in den für V_i gefundenen Ausdruck ein, so ergiebt sich als Green'sche Function der unendlichen Platte:

$$V_i=\frac{1}{\sqrt{(\delta-x)^2+y^2+z^2}}-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\varkappa\frac{(-1)^\varkappa}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{t}}\cdot e^{-t\{(\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa\delta-x)^2+y^2+z^2\}}$$

oder, die geraden und ungeraden Glieder getrennt:

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{(\delta-x)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_x \left\{ e^{-t[(2\varkappa\alpha+\delta-x)^2+y^2+z^2]} - e^{-t[(2\varkappa\alpha+\alpha-\delta-x)^2+y^2+z^2]} \right\}$$

Die hier vorkommenden Summen sind direct als Jacobi'sche ϑ function zu schreiben. Wir benutzen die Definition:

$$\vartheta(z, g) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_x e^{n^2 g + 2nz}; \qquad (g < 0)$$

und haben:

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{(\delta-x)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t(y^2+z^2)}$$

$$\{ e^{-t(\delta-x)^2} \vartheta(2\alpha t(\delta-x), -4\alpha^2 t) - e^{-t(\alpha-\delta-x)^2} \vartheta(2\alpha . t . (\alpha-\delta-x), -4\alpha^2 t) \}$$

In analoger Weise sind die beiden oben (S. 339) erhaltenen Greenschen Oberflächenbelegungen der Platte umzugestalten. Wir geben ihnen zunächst die folgende Form:

$$\begin{cases} \eta I = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{d\delta} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_x \frac{1}{\sqrt{(\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa \delta - \frac{\alpha}{2})^2 + z^2 + y^2}} \\ \eta II = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{d\delta} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_x \frac{1}{\sqrt{(\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa \delta + \frac{\alpha}{2})^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

und machen hier wieder die Riemann'sche Substitution.

Es resultirt:

$$\begin{cases} \eta I = \frac{1}{2(\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d}{d\delta} \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t\left[y^2+z^2+\left(\delta-\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]} \cdot \vartheta\left[2at\left(\frac{\alpha}{2}-\delta\right), -4a^2 t\right] \\ \eta II = \frac{-1}{2(\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d}{d\delta} \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t\left[y^2+z^2+\left(\frac{\alpha}{2}+\delta\right)^2\right]} \cdot \vartheta\left[2at\left(\frac{\alpha}{2}+\delta\right), -4a^2 t\right] \end{cases}$$

Nach diesen einfacheren Betrachtungen sind wir in den Stand gesetzt, die Lösung der betreffenden Aufgaben für complicirtere Poly-

eder, namentlich für den Fall des Parallelepipedons, fast unmittelbar hinzuschreiben. Wir betrachten nur den letzteren Körper; seine Kantenlängen (resp. parallel der xyzachse) nennen wir $\alpha\beta\gamma$, den Coordinatenanfang verlegen wir in den Mittelpunkt und verstehen unter abc die Coordinaten des Pols. Wir denken uns ferner sämtliche Spiegelpunkte des Pols gegen die sechs Grenzebenen bis ins Unendliche hin construirt — ihre Coordinaten sind

$$\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}a, \quad \lambda\beta+(-1)^{\lambda}b, \quad \mu\gamma+(-1)^{\mu}c$$

— und erteilen ihnen die Massen $(-1)^{\varkappa+\lambda+\mu+1}$.

Alle Spiegelpunkte erhalten wir, wenn wir $\varkappa$, λ, μ je von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen lassen und sämtliche Combinationen, mit Ausschluss von $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, bilden; denn letztere ergiebt den Punkt P selbst.

Die Green'sche Function für das Parallelepipedon wird demnach lauten:

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}}$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\sum_{\lambda}\sum_{\mu} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\mu+1}}{\sqrt{[\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}a-x]^2+[\lambda\beta+(-1)^{\lambda}b-y]^2+[\mu\gamma+(-1)^{\mu}c-z]^2}}$$

von der leicht zu übersehen ist, dass sie in der Tat allen Anforderungen genügt. Wir machen wieder die Riemann'sche Substitution und erhalten bei Anwendung der Abkürzungen:

$$\begin{cases} E = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2} \\ E_{\varkappa\lambda\mu} = \sqrt{[\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}a-x]^2+[\lambda\beta+(-1)^{\lambda}b-y]^2+[\mu\gamma+(-1)^{\mu}c-z]^2} \end{cases}$$

$$V_i = \frac{1}{E}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\sum_{\lambda}\sum_{\mu}(-1)^{\varkappa+\lambda+\mu+1}\cdot e^{-tE^2_{\varkappa\lambda\mu}}$$

$$= \frac{1}{E}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}(-1)^{\varkappa}e^{-t[\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}a-x]^2}\right\}$$

$$\cdot\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda}(-1)^{\lambda}e^{-t[\lambda\beta+(-1)^{\lambda}b-y]^2}\right\}\cdot\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}e^{-t[\mu\gamma+(-1)^{\mu}c-z]^2}\right\}$$

oder bei Einführung der Jacobi'schen ϑfunction:

$$Vi = \frac{1}{E} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \Big\{ e^{-t(a-x)^2} \vartheta\,(2\alpha t\,(a-x),\, -4\alpha^2 t) - e^{-t(a-x-a)^2} \vartheta\,(2\alpha t\,(\alpha - x - a)) \Big\} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ e^{-t(b-y)^2} \vartheta\,(2\beta t\,(b-y),\, -4\beta^2 t) - e^{-t(\beta-y-b)^2} \vartheta\,(2\beta t\,(\beta - y - b)) \Big\} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ e^{-t(c-z)^2} \vartheta\,(2\gamma t\,(c-z),\, -4\gamma^2 t) - e^{-t(\gamma-z-c)^2} \vartheta\,(2\gamma t\,(\gamma - z - c)) \Big\}$$

Ebenso unmittelbar ergiebt der allgemeine, S. 5 genannte, Satz die Green'sche Oberflächenbelegung für die einzelnen Grenzebenen des Parallelepipedons.

Für die Ebene $x = +\frac{\alpha}{2}$ z. B. folgt:

$$\eta I = \frac{1}{2\pi} \sum_{+1}^{+\infty}{}_{\varkappa} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda} \sum_{\mu} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\mu+1} \left(\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa a - \frac{\alpha}{2} \right)}{\left[\left(\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa a - \frac{\alpha}{2} \right)^2 + (\lambda\beta + (-1)^\lambda b - y)^2 + (\mu\gamma + (-1)^\mu (c-z)^2 \right]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{da} \sum_{\varkappa}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda} \sum_{\mu} \frac{(-1)^{\lambda+\mu}}{\sqrt{\left(\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa a - \frac{\alpha}{2} \right)^2 + (\lambda\beta + (-1)^\lambda b - y)^2 + (\mu\gamma + (-1)^\mu c - z)^2}}$$

oder in ϑ functionen geschrieben:

$$\eta I = \frac{1}{2\,(\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{da} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\, e^{-t\left(\frac{\alpha}{2} - a\right)^2} \vartheta\,(2\alpha t \left(\frac{\alpha}{2} - a \right),\, -4\alpha^2 t).$$

$$\cdot \{ e^{-t(b-y)^2} \vartheta(2\beta t\,(b-y),\, -4\beta^2 t) - e^{-t(\beta-y-b)^2} \vartheta(2\beta t\,(\beta - y - b,\, -4\beta^2 t) \}.$$

$$\cdot \{ e^{-t(c-z)^2} \vartheta(2\gamma t\,(c-z),\, -4\gamma^2 t) - e^{-t(\gamma-z-c)^2} \vartheta\,(2\gamma t\,(\gamma - z - c),\, -4\gamma^2 t) \}$$

Genau entsprechend sind die Ausdrücke ηII und ηIII, die Belegungen der Ebenen $y = \frac{\beta}{2}$ und $z = \frac{\gamma}{2}$ gebildet, und für das Ebenenstück $x = -\frac{\alpha}{2}$ ergiebt sich:

$$\eta IV = \frac{-1}{4\pi}\frac{d}{da}\Sigma_\varkappa \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\lambda \Sigma_\mu \frac{(-1)^{\lambda+\mu}}{\sqrt{\left(\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa a+\frac{\alpha}{2}\right)^2+(\lambda\beta+(-1)^\lambda b-y)^2+(\mu\gamma+(-1)^\mu c-z)^2}}$$

oder nach der bekannten Umformung:

$$\eta IV = \frac{-1}{2(\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{d}{da}\cdot\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t\left(\frac{\alpha}{2}+a\right)^2} \vartheta\left(2at\left(\frac{\alpha}{2}+a\right), -4a^2t\right).$$

$$.\{c^{\,t(b-y)^2}\vartheta(2\beta t(b-y), -4\beta^2 t) - e^{-t(\beta-b-y)^2}\vartheta(2\beta t(\beta-b-y))\}.$$

$$.\{e^{-t(c-z)^2}\vartheta(2\gamma t(c-z), -4\gamma^2 t) - e^{-t(\gamma-c-z)^2}\vartheta(2\gamma t(\gamma-c-z))\}$$

Ohne auf eine nähere Discussion dieser Formeln eingehen zu können, bemerken wir nur — wie aus den Formeln in ϑ unmittelbar ersichtlich, dass ηI wie ηIV für $y = \frac{\beta}{2}$ oder $z = \frac{\gamma}{2}$ verschwinden; allgemein, dass die Green'sche Oberflächenbelegung in jedem Punkt jeder Kante des Parallelepipedons 0 ist. Das muss so sein, denn es gilt überhaupt von jeder stetigen Belegung jedes mit Kanten behafteten Körpers; es ist eine notwendige Vorbedingung der Stetigkeit; im anderen Falle kann die Belegung keine zusammenhangende Oberfläche bilden.

II.

Strömung der Elektricität auf dem Parallelepipedon.

Die Aufgaben, welche uns hier zu beschäftigen haben, sind folgender Natur:

> Gegeben ist ein Conductor von bestimmter Gestalt. Durch einen dünnen Draht tritt ein elektrischer Strom in einem Punkt der Oberfläche ein, in einem anderen wieder aus.
>
> Zu bestimmen sind die Werte des Gesamtpotentials für jeden Punkt des Conductors; womit dann auch die Flächen constanten Potentials, sowie die Strömungscurven der Elektricität an der Oberfläche definirt sind.

Zur Lösung verwenden wir eine Methode, die C. Neumann in den letzten Capiteln seiner Vorlesung über Elektrostatik (Ostern 1884/85) vorführt.

Unter Zugrundelegung der Kirchhoff'schen Hypothesen über den stationären Zustand wird dort als Gesamtpotential für jeden Punkt x_p, y_p, z_p des gegebenen Conductors abgeleitet:

$$V_p = \frac{J}{4\pi\varkappa}\left\{\left(U^p - \frac{1}{E_p}\right)_B - \left(U^p - \frac{1}{E_p}\right)_A\right\}$$

hierin bedeutet J die Stromintensität, $\varkappa$ die Leitungsfähigkeit des Conductors, A und B sind Ein- resp. Austrittsstelle des Stromes und ihre Coordinaten sind für die allgemeinen Coordinaten x, y, z in die Klammerausdrücke einzutragen. In den letzteren endlich ist

$$E_p = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2}$$

und U^p eine in jedem Falle besonders zu bestimmende Function, welche durch folgende Bedingungen eindeutig bestimmt ist:

Innerhalb des Conductors ist U^p mit seinen ersten Ableitungen überall eindeutig und stetig, auch ist hier überall $\triangle U^p = 0$; an allen Oberflächenpunkten genügt sie der Differentialgleichung:

$$\frac{d\overline{U^p}}{dn} - \frac{d\overline{\frac{1}{E_p}}}{dn} = -\frac{4\pi}{s}$$

wo s die Oberfläche des Conductors repräsentirt, n die innere Oberflächennormale.

Die Gewinnung der Resultate nach dieser Methode für das Parallelepipedon wird auch hier durch vorherige Betrachtung einfacherer Fälle erleichtert.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall dieser Art, indem wir uns als Conductor den Halbraum, begrenzt durch die Ebene $x = \delta$ denken.

Zunächst wird uns die Bestimmung von U^p beschäftigen. Wir construiren den Spiegelpunkt von p und erteilen ihm die Masse —1. Das Potential dieses Massenpunktes genügt, da $s = \infty$ ist, allen an U^p gestellten Bedingungen; es ist daher hier:

$$U^p = \frac{-1}{\sqrt{(2\delta - x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2}}$$

und aus der oben genannten Relation folgt für die Gleichung der Flächen constanten Potentials:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\delta-x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}\right\} A$$

$$-\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\delta-x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}\right\} B$$

$$= \text{const.}$$

Die allgemeinste Lage erteilen wir den Punkten A und B, wenn wir als ihre xyz Cordinaten resp. festsetzen δ, b, 0 und δ, $-b$, 0. Die Flächen constanten Potentials sind alsdann:

$$\frac{1}{\sqrt{(\delta-x_p)^2+(y_p-b)^2+z_p^2}}-\frac{1}{\sqrt{(\delta-x_p)^2+(y_p+b)^2+z_p^2}}=\text{const.}$$

Wir suchen vor allem die Curven constanten Potentials an der Oberfläche des Conductors und haben als solche die Curven:

$$\frac{1}{\sqrt{z_p^2+(y_p-b)^2}}-\frac{1}{\sqrt{z_p^2+(y_p+b)^2}}=\text{const.}$$

Für alle Punkte einer solchen Curve ist also die Differenz ihrer reciproken Abstände von der Ein- und Austrittsstelle des Stromes eine constante Grösse, und wir bezeichnen sie wegen dieser an die Hyperbel erinnernden Definition vor der Hand als „reciproke Hyperbeln".

Eine Behandlung dieser Curvengattung ist uns nicht bekannt, und wir wollen daher mit einigen Worten ihre Gestalt erläutern, wie auch im Anhang ein allgemeines Bild ihrer Form gegeben ist.

Bringen wir die Definitionsgleichung der „reciproken Hyperbel" auf die algebraische Form, so gelangen wir zu einer wenig übersichtlichen Gleichung 8. Grades, die noch dazu nicht nur unsere Curve $\frac{1}{E_A}-\frac{1}{E_B}=\text{const.}$, sondern auch die reciproke Ellipse

$$\frac{1}{E_A}+\frac{1}{E_B}=\text{const.}$$

umfasst, wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzeln.

Dagegen hat es gar keine Schwierigkeiten die einzelnen Punkte unserer Curve zu construiren, wenn wir nur ihre Definitionsgleichung in folgende zwei, gleichzeitig zu erfüllende, Gleichungen zerlegen:

$$1)\quad \frac{1}{\sqrt{z_p^2+(y_p-b)^2}}=a$$

$$2)\quad \frac{1}{\sqrt{z_p^2+(y_p+b)^2}} = a-c;$$

und hierin a alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lassen.

Wir erhalten demnach die Punkte unserer Curve, wenn wir um die Eintrittsstelle einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{a}$, um die Austrittsstelle einen solchen mit dem Radius $\frac{1}{a-c}$ beschreiben und die Schnittpunkte beider markiren.

Für die Natur der reciproken Hyperbel erhellt daraus unmittelbar, dass sie, analog der eigentlichen Hyperbel symmetrisch zur Axe AB (der grossen Axe) liegt; ebenso wird sie auch aus zwei congruenten, zur kleinen Axe symmetrischen Aesten bestehen, wenn man nämlich, wie bei der Hyperbel, c nur absolut betrachtet, die positiven und negativen Werte nicht scheidet: Die Curve $\frac{1}{E}-\frac{1}{E'}=c$ wird sich genau so um den einen Punkt herumziehen, wie die Curve $\frac{1}{E'}-\frac{1}{E}=c$ um den andern.

Endlich sind auch die beiden Grenzcurven $c=0$ und $c=[\infty]$ ohne weiteres abzulesen: $c=0$ ergibt die y axe, doppelt überdeckt zu denken wie bei der Hyperbel selbst; $c=\infty$ repräsentirt die beiden Punkte A und B. Zwischen beiden Grenzcurven ziehen sich die übrigen als congruente Ovale um A und B herum. Um die einzelnen zu erhalten, werden wir die Radien $\left(\frac{1}{a}\text{ und }\frac{1}{a-c}\right)$ der betreffenden Kreise für die verschiedenen Werte von a tabellarisch zusammenstellen und dann ermitteln, welche dieser Kreise gewünschte Schnittpunkte liefern.

Für die reciproke Hyperbel $c=1$ z. B. entwerfen wir die folgende Tabelle:

a	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a-1}$	
$-\infty$	0	0	α
-10	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{11}$	
-1	-1	$-\frac{1}{2}$	
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{5}$	β
$-\frac{1}{3}$	-3	$-\frac{3}{4}$	
$-\frac{1}{4}$	-4	$-\frac{4}{5}$	γ
0	∞	-1	
$\frac{1}{4}$	4	$-\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	3	$-\frac{3}{2}$	δ
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	-3	
$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	-5	ε
1	1	∞	
$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	3	
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	2	ζ
$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{2}$	
2	$\frac{1}{2}$	1	η
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	
∞	0	0	

Nehmen wir alsdann noch als Abstand der Punkte AB die Grösse 2 an, so liegen die in Frage kommenden Kreise ausserhalb einander in den Intervallen α und η der Tabelle; in den Intervallen β und ζ schneiden sie sich in den Punkten der reciproken Hyperbel; in γ und ε umschliesst ein Kreis den andern, und in δ endlich stellt sich die „reciproke Ellipse“ ein, denn hier ist

$$\left[\frac{1}{E}\right]+\left[\frac{1}{E'}\right]=1.$$

Die letztgenannte Curve ist hier nicht zu betrachten; sie besteht zunächst ebenfalls aus zwei congruenten Ovalen um A und B herum geht aber mit wachsendem c in eliipsenförmige Gebilde (A und B umschliessend) über und hat als Grenzlage die unendlich grosse Curve.

Nachdem wir somit ermittelt haben, in welchen Curven die Flächen constanten Potentials von der Oberfläche des Conductors geschnitten werden, sind uns diese Flächen selbst ebenfalls bekannt. Es sind die Rotationsflächen der reciproken Hyperbel um die grosse Axe AB; wir haben sie als zweischalige reciproke Rotationshyperboloide zu bezeichnen.

In einem zweiten vorläufigen Specialfalle betrachten wir einen Conductor von der Form eines senkrechten unendlichen Keils. Zu dem Punkte p, in Bezug auf den wir das Gesamtpotential suchen, construiren wir die drei Spiegelpunkte gegen die Ebenen des Conductors und haben alsdann in dem negativen Potential dieser drei, je mit der Masse 1 versehenen, Punkte die zu suchende Function U^p.

Dass diese Function

$$U^p = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{(x_p+x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}} + \frac{-1}{\sqrt{(x_p+x)^2+(y_p+y)^2+(z_p-z)^2}} + \frac{-1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p+y)^2+(z_p-z)^2}} \right\}$$

in der Tat den an U gestellten Bedingungen genügt, ist unmittelbar zu übersehen, und die Flächen constanten Potentials sind in jedem Falle leicht daraus herzustellen.

Verschiedene specielle Annahmen über Ein- und Austrittsstelle des Stromes führen zu interessanten Resultaten, um aber nicht zu sehr ins Detail zu geraten, greifen wir nur den einfachsten Fall heraus, wo beide Punkte A und B auf der Axe des Keils sich befinden.

Als ihre Coordinaten haben wir alsdann resp. 0, 0, δ und 0, 0, $-\delta$ und die Flächen constanten Potentials werden repräsentirt durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{x_p^2+y_p^2+(z_p-\delta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_p^2+y_p^2+(z_p+\delta)^2}} = c.$$

Es sind das dieselben Flächen, wie wir sie für den Halbraum als Conductor erhielten: ihre Schnitte mit den Grenzebenen sind reciproke Hyperbeln, sie selbst Rotationsflächen der letzteren um die grosse Axe.

Die planparallele unendliche Platte mag den letzten zu untersuchenden Specialfall bilden.

Auch hier nehmen wir sämtliche aufeinander folgenden Spiegelpunkte bis ins Unendliche hin von p hinzu, und setzen U^p gleich dem negativen Potential der letzteren, schreiben also, unter Benutzung der Bezeichnungsweise des I. Abschnitts:

$$U^p = \frac{1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa} \frac{1}{\sqrt{(x\alpha+(-1)^{\varkappa}x_p-x)^2+y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}$$

Diese Function genügt, als Potential äusserer Massen, den Hauptbedingungen unmittelbar; weiter aber ist:

$$\left(\frac{dU^p}{dx}\right)_{x=\frac{\alpha}{2}} = \left(d\frac{1}{\frac{E_p}{dx}}\right)_{x=\frac{\alpha}{2}}$$

$$-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_x \frac{x\alpha - \frac{\alpha}{2} + (-1)^x x_p}{\left\{\left(x\alpha + (-1)^x x_p - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2\right\}^{3/2}}$$

$$\left(\frac{dU^p}{dx}\right)_{x=\frac{\alpha}{2}} = \left(d\frac{1}{\frac{E_p}{dx}}\right)_{x=-\frac{\alpha}{2}}$$

$$-\Sigma_x \frac{x\alpha + \frac{\alpha}{2} + (-1)^x x_p}{\left\{\left(x\alpha + (-1)^x x_p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2\right\}^{3/2}}$$

und hierin heben sich die Summen Glied für Glied fort, wie es erforderlich ist.

Dagegen begegnen wir hier einer neuen Schwierigkeit, indem für U^p eine nicht unbedingt convergente Reihe gewonnen ist. Um das zu erkennen, benutzen wir den bekannten Lehrsatz, dass eine Reihe ΣU_n convergirt oder divergirt, je nachdem

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{u_n + 1}{u_n}\right) > 1 \quad \text{oder} \quad < 1.$$

Die vorliegende Reihe formen wir in der Weise um, dass wir den Wurzelausdruck im Nenner nach Potenzen von $(y_p - y)^2 + (z_p - z)^2$ entwickeln. Die Factoren der 1., 2. etc. Potenz nähern sich mit wachsendem x unbegrenzt der Null und genügt es daher, folgende Reihe zu untersuchen:

$$\Sigma U_n = \Sigma \frac{1}{(x\alpha + (-1)^x x_p - x + c}:$$

Für dieselbe ist

$$\lim x\left(1 - \frac{u_{x+1}}{u_x}\right) = \lim x\left(1 - \frac{x\alpha + (-1)^x x_p - x + c}{x\alpha + \alpha - (-1)^x x_p - x + c}\right)$$

$$= \lim \frac{x(\alpha^x - (-1)^x 2x_p)}{x\alpha + \alpha - (-1)^x x_p - x + c}$$

$$= 1 - (-1)^x \frac{2x_p}{\alpha}$$

und dieser Wert ist dann, und nur dann > 1, wenn x ungerade ist,

da $\frac{2x_p}{\alpha}$ stets ein ächter Bruch ist. Geht $\varkappa$ durch die negativen Zahlen ins Unendliche, wie es hier auch zu untersuchen ist, so kommt die Reihe:

$$\sum_{n}^{\infty} U_n = \frac{1}{-\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}x_p-x+c}$$

in Betracht; obiger Grenzwert ist alsdann:

$$-\left(1+(-1)^{\varkappa}\frac{2x_p}{\alpha}\right)$$

und er ist >1 für $\varkappa$ gerade.

Wir sehen also, unsere Reihe für U_p ist an sich nicht unbedingt convergent; zugleich aber lehrt die letzte Betrachtung, dass die erwünschte Convergenz erreicht wird, wenn wir nur je zwei aufeinander folgende Glieder unserer Reihe zusammenfassen, eins mit geradem, eins mit ungeradem $\varkappa$, letzteres mit dem grösseren Wert von $\varkappa$ in der Zahlenreihe. Mit anderen Worten, wir haben zu setzen:

$$U^p = \frac{1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}$$
$$-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\varkappa\alpha+x_p-x)^2+r^2}}+\frac{1}{\sqrt{(2\varkappa\alpha+\alpha-x_p-x)^2+r^2}}\right\}$$
$$r^2=(y_p-y)^2+(z_p-z)^2.$$

Dass diese Reihe in der Tat convergirt, ergibt auch eine neue Anwendung des erwähnten Convergenzsatzes auf dieselbe.

Eine andere Form für U^p liefert die im ersten Teil mehrfach verwendete Riemann'sche Substitution:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}e^{-Nt}$$

in den letzten Ausdruck.

Es resultirt

$$U^p = \frac{1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-x)^2+(z_p-z)^2}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}e^{-tr^2}\left\{e^{-t(x_p-x)^2}\,\vartheta(2\alpha t(x_p-x),-4\alpha^2t)\right.$$
$$\left.+e^{-t(x_p+x-\alpha)^2}\,\vartheta(2\alpha t(x_p+x-\alpha),-4\alpha^2t)\right\},$$

Nach Aufstellung von U^p sind die Flächen constanten Potentials nach bekannter Methode zu finden. Wir haben zwei Fälle zu scheiden. Im ersten a) liegen Ein- und Austrittsstelle des Stromes auf derselben Grenzebene der Platte, im zweiten Falle b) auf verschiedenen Grenzebenen.

Im Falle a) sind als Coordinaten der Punkte A und B resp. anzunehmen: $\frac{\alpha}{2}$, b, 0 und $\frac{\alpha}{2}$, $-b$, 0; die Flächen constanten Potentials werden alsdann (gleich in ϑ ausgedrückt):

$$c = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t\left[z_p^2 + \left(\frac{\alpha}{2} - x_p\right)^2\right]} \left\{ e^{-t(y_p - b)^2} - e^{-t(y_p + b)^2} \right\} \vartheta\left(2\alpha t\left(\frac{\alpha}{2} - x_p\right), -4\alpha^2 t\right).$$

Im Falle b) sind die betreffenden Coordinaten ganz allgemein, $\frac{\alpha}{2}$, b, 0, und $-\frac{\alpha}{2} - b$, 0, die Flächen constanten Potentials lauten zunächst:

$$c = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t\left[z_p^2 + (y_p - b)^2 + \left(x_p - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right]} \cdot 2\vartheta\left(at\left(x_p - \frac{\alpha}{2}\right), -4\alpha^2 t\right)$$

$$- \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t\left[z_p^2 + (y_p + b)^2\right]}$$

$$\left\{ e^{-t\left(x_p + \frac{\alpha}{2}\right)^2} \vartheta\left(2\alpha t\left(x_p + \frac{\alpha}{2}\right)\right) + e^{-t\left(x_p - \frac{3\alpha}{2}\right)} \cdot \vartheta\left(2\alpha t\left(x_p - \frac{3\alpha}{2}\right)\right) \right\}$$

Nach dem Satze $\vartheta(z, g) = e^{g + 2z}\, \vartheta(z + g, g)$ sind aber die beiden Summanden des letzten Gliedes gleich und kommt daher für die Fächen constanten Potentials:

$$c = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-tz_p^2} \left\{ e^{-t\left[\left(\frac{\alpha}{2} - x_p\right)^2 + (y_p - b)^2\right]} \cdot \vartheta\left(2\alpha t\left(\frac{\alpha}{2} - x_p\right), -4\alpha^2 t\right) \right.$$

$$\left. - e^{-t\left[\left(\frac{\alpha}{2} + x_p\right)^2 + (y_p + b)^2\right]} \cdot \vartheta\left(2\alpha t\left(\frac{\alpha}{2} + x_p\right), -4\alpha^2 t\right) \right\}$$

Die Flächen beider Arten sind im allgemeinen von sehr com-

plicirter Beschaffenheit und können hier nicht näher untersucht werden.

Zu einfachen Resultaten gelangen wir nur dann, wenn die Punkte A und B in gegenüberliegenden Punkten der Platte sich befinden; d. h. in unserm zweiten Fall bei der Annahme $b = 0$. Dann nämlich kommen in unserer Flächengleichung die Coordinaten y_p und z_p nur in der Verbindung $y_p^2 + z_p^2$ vor; es sind also die Flächen constanten Potentials Rotationsflächen um die Axe AB. Das ergiebt weiter als Niveaucurven an der Oberfläche des Conductors die Kreise um A resp. um B; als Strömungscurven der Elektricität die von A und B ausgehenden Geraden.

Nach Behandlung dieser verschiedenen Specialfälle ist unsere eigentliche Aufgabe leicht zu erledigen. Die drei Kantenlängen des Parallelepipedons seien α, β, γ. Setzen wir alsdann, ganz analog den bisherigen Ergebnissen

$$U^{p}_{1} = \frac{1}{\sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2}}$$
$$- \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x\alpha + (-1)^{\varkappa} x_p - x)^2 + (\lambda\beta + (-1)^{\lambda} y_p - y)^2 + (\mu\gamma + (-1)^{\mu} z_p - z)^2}}$$

so genügt diese Function den an U zu stellenden Hauptbedingungen und ausserdem ist für alle Oberflächenpunkte

$$\frac{dU^{p}_{1}}{dn} - \frac{d\frac{1}{E_p}}{dn} = 0.$$

Da nun in diesem Fall nicht, wie sonst, $s = \infty$ ist, so müssen wir, um U für Parallelepipedon zu erhalten, noch eine neue Function f hinzufügen, die im Innern des Conductors überall den Hauptbedingungen (f, $\frac{df}{dx}$ ... eindeutig und stetig) genügt und in den Oberflächenpunkten die Gleichung

$$\frac{df}{dn} = -\frac{4\pi}{s}$$

erfüllt. Die letzte Bedingung wird befriedigt durch die unendlich vieldeutige Function

$$\frac{4\pi}{s(2n+1)} \left\{ \frac{x^{2n+1}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}} + \frac{y^{2n+1}}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2n}} + \frac{z^{2n+1}}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}} \right\}$$

für jeden Wert von n; im allgemeinen aber erfüllen diese Functionen die Hauptbedingungen nicht. Das geschieht vielmehr nur in dem Falle $n = 0$, und wir haben daher zu setzen:

$$f = \frac{4\pi}{s}(x+y+z)$$

$$U^p = \frac{4\pi}{s}(x+y+z) + \frac{1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}$$

$$-\sum_{-\infty}^{+\infty}\Sigma_\varkappa\Sigma_\lambda\Sigma_\mu \frac{1}{\sqrt{(\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa x_p-x)^2+(\lambda\beta+(-1)^\lambda y_p-y)^2+(\mu\gamma+(-1)^\mu z_p-z)^2}}$$

Die Riemann'sche Substitution giebt für die letzte Grösse die andere Form:

$$U^p = \frac{4\pi}{s}(x+y+z) + \frac{1}{E_p} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \times$$

$$\left\{e^{-t(x_p-x)^2}\vartheta(2\alpha t(x_p-x),\ -4\alpha^2 t) + e^{-t(x_p+x-\alpha)^2}\vartheta(2\alpha t(x_p+x-\alpha))\right\}$$

$$\cdot\left\{e^{-t(y_p-y)^2}\vartheta(2\beta t(y_p-y),\ -4\beta^2 t) + e^{-t(y_p+y-\beta)^2}\vartheta(2\beta t(y_p+y-\beta))\right\}$$

$$\cdot\left\{e^{-t(z_p-z)^2}\vartheta(2\gamma t(z_p-z),\ -4\gamma^2 t) + e^{-t(z_p+z-\gamma)^2}\vartheta(2\gamma t(z_p+z-\gamma))\right\}$$

und zwar ist diese Form als die allein strenge anzusehen. Denn, analog wie bei der unendlichen Platte, wird auch hier eine Reihe, welche U^p in der ersten Form darstellt, nur bei geeigneter Zusammenfassung der Glieder convergiren.

Diese geeignete Zusammenfassung ist aber bei Einführung der ϑ-functionen von selbst erforderlich; weshalb die letzte Form allein allen Anforderungen genügt.

Jm Uebrigen vermittelt U^p die Aufstellung der Flächen constanten Potentials ohne weiteres in jedem speciellen Fall. Legen wir z. B. die Punkte A und B in die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Seitenflächen des Conductors, setzen also als ihre Coordinaten resp. $\frac{\alpha}{2}$, ,0 0 und $-\frac{\alpha}{2}$, 0, 0 fest; so werden wir nach einfachen Umformungen erhalten als Gleichung der Flächen:

$$V = c$$

$$c = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\left\{e^{-ty_p^2}\vartheta(2\beta t y_p) + e^{-t(y_p-\beta)^2}\vartheta(2\beta t(y_p-\beta))\right\} \times$$

$$\cdot \left\{ e^{-tz_p^2} \vartheta(2\gamma t z_p) + e^{-t(z_p-\gamma)^2} \vartheta(2\gamma t(z_p-\gamma)) \right\}$$

$$\cdot \left\{ e^{-t\left(x_p-\frac{\alpha}{2}\right)^2} \vartheta\left(2\alpha t\left(x_p-\frac{\alpha}{2}\right)\right) - e^{-t\left(x_p+\frac{\alpha}{2}\right)^2} \vartheta\left(2\alpha t\left(x_p+\frac{\alpha}{2}\right)\right) \right\}$$

Sind andererseits zwei gegenüberliegende Ecken des Parallelepipedons $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right.$ und $\left. -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2}\right)$ Ein- resp. Austrittsstelle des Stromes, so lautet die gesuchte Gleichung:

$$c = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \left\{ e^{-t\left[\left(x_p-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y_p-\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(z_p-\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]} \times \right.$$

$$\vartheta\left(2\alpha t\left(x_p-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\vartheta\left(2\beta t\left(y_p-\frac{\beta}{2}\right)\right)\vartheta\left(2\gamma t\left(z_p-\frac{\gamma}{2}\right)\right)$$

$$- e^{-t\left[\left(x_p+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y_p+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(z_p+\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]} \times$$

$$\left. \vartheta\left(2\alpha t\left(x_p+\frac{\alpha}{2}\right)\right)\vartheta\left(2\beta t\left(y_p+\frac{\beta}{2}\right)\right)\vartheta\left(2\gamma t\left(z_p+\frac{\gamma}{2}\right)\right) \right\}.$$

Unsere Aufgabe ist damit als gelöst zu betrachten.

Lebenslauf.

Am 19. April 1862 zu Varel in Oldenburg geboren, besuchte ich, Hermann Niebour, zunächst die Realschule meiner Vaterstadt, sodann das Realgymnasium zu Lübeck. Ostern 1881 hier, mit dem Zeugnis der Reife, entlassen, bezog ich die Universität Leipzig und widmete mich in den folgenden vier Jahren, darunter ein Jahr lang in München dem Studium der Mathematik.

Durch die Herrn Professoren Mayer, Klein und Schur wurde ich mit den Elementen der Mathematik bekannt gemacht; später war es mir vergönnt durch die Vorträge und Seminarien des Herrn Professors C. Neumann in diejenigen Gebiete der höheren Mathematik einzudringen, welche mir zugänglich geworden sind. — Neben meinen rein mathematischen Studien trieb ich Astronomie bei Herrn Professor Seeliger, practische Physik bei den Herrn Professoren Jolly und Beetz, auch hörte ich Collegien bezw. Seminarien in der Philosophie bei den Herrn Professoren Wundt und Seidel, in der Pädagogik bei Herrn Professor Masius und in der Geschichte bei Herrn Professor Biedermann. — Mitte Juli 1885 bestand ich das Staatsexamen für das höhere Lehrfach in Leipzig und bin seitdem als Hülfsarbeiter im kaiserlichen statistischen Amt zu Berlin beschäftigt.

Ich erlaube mir an dieser Stelle allen meinen verehrten Herren Lehrern meinen vollsten Dank zu sagen; vor Allem aber fühle ich mich Herrn Professor Neumann gegenüber zu stetem Dank verpflichtet, dem ich auch die Wahl dieses Themas zu danken habe.